Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$

On pose $E = \left\{ f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right) / \forall x \in \mathbb{R}^3 \quad q(f(x)) = q(x) \right\}$.

1) Montrer que $(E, \circ)$ est un groupe.

2) Montrer que $\det f = \pm 1$ pour tout $f \in E$.

3) On suppose que $f \in E$ et l'on note $M = (a_{ij})$ la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer l'inégalité $a_{33}^2 \geq 1$.

\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-\-

Solution :

[0] [ufmb0006] v1.00β **Dany-Jack Mercier**

Exercice : Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$

On pose $E = \{ f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \;/\; \forall u \in \mathbb{R}^3 \quad q(f(u)) = q(u) \}$

1°/ Montrer que $(E, \circ)$ est un groupe

2°/ Montrer que si $f \in E$, on a : $\det f = \pm 1$

3°/ Si $M = (a_{ij})$ désigne la matrice de $f \in E$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, montrer que $a_{33}^2 \geq 1$

Solution :

1°/ * f bijective ?

$$q(f(u)) = q(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow b(f(u), f(v)) = b(u,v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3$$

où b est la forme bilinéaire symétrique associée à q

(cf. $b(u,v) = \frac{1}{2}(q(u+v) - q(u) - q(v))$)

Si $f(u) = 0$, alors $b(u,v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^3$, et comme b est non dégénérée (car la matrice de q est $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui est aussi la matrice de $\tilde{b} : u \mapsto b_u \,/\, b_u(v) = b(u,v)$ dans les bases canoniques) on aura $u = 0$. Donc f sera injective, ie bijective (c'est un endomorphisme !).

CQFD

* $(E, \circ)$ groupe se montre alors sans peine

2°/ En notant X la matrice-colonne u, M la matrice de f et B la matrice de q (dans (e_1, e_2, e_3)), $q(f(u)) = q(u)$ s'écrit :

$$^t(MX)\,B(MX) = {}^tXBX$$

$$^tX\,^tMBMX = {}^tXBX \quad \forall X \quad (*)$$

d'où $\quad ^tMBM = B$

$\underbrace{\det(^tM)}_{=\det M} . \det B . \det M = \underbrace{\det B}_{=-1} \Rightarrow (\det M)^2 = 1 \Leftrightarrow \det M = \pm 1$. oui

3°/ $f(e_3) = a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3$, donc :

$$q(f(e_3)) = a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2 = q(e_3) = -1$$

et l'on obtient $a_{33}^2 = 1 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \geq 1$ oui

---

(*) On a vu que $b(f(u), f(v)) = b(u,v) \quad \forall u, v$ au 1°/, d'où :

$^tX\,^tMBMY = {}^tXBY \underset{(1)}{\Rightarrow} {}^tMBM = B$

(1) facile à vérifier car $^tXBY = \sum a_{ij} x_i y_j$ si $B = (a_{ij})$ et nous avons l'égalité de 2 polynômes en x_i et y_i ...

Exercice : Procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Soit E un espace vectoriel euclidien sur $\mathbb{R}$. On note $u \cdot v$ le produit scalaire sur E.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer qu'il existe une et une seule base orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ de E telle que, pour tout $i = 1, \dots, n$, on ait :

1) le s.e.v. engendré par $(e_1, \dots, e_i)$ est égal au s.e.v. engendré par $(f_1, \dots, f_i)$,

2) $e_i \cdot f_i > 0$

Application : Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)$.

On note b la forme bilinéaire symétrique associée à f. Montrer que E muni de b est un espace euclidien, puis orthonormaliser la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ grâce au procédé de Schmidt.

Solution :

* Notons F_i le s.e.v. engendré par $e_1, \dots, e_i$

$$f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \in F_1$$

(fig. 1)

$f_2 \in F_2 \cap F_1^\perp$, or $F_2 + F_1^\perp = E$ (facile), donc

on a : $\dim F_2 \cap F_1^\perp = \dim F_2 + \dim F_1^\perp - n = 2 + (n-1) - n = 1$.

On aura 2 possibilités pour le choix du vecteur unitaire f_2 de la droite vect. $F_2 \cap F_1^\perp$, et un seul vérifiera la condition $e_2 \cdot f_2 > 0$. On le prend.

....

$f_i \in F_i \cap F_{i-1}^\perp$, et $F_i + F_{i-1}^\perp = E$ donc : (comme précédemment)

$$\dim F_i \cap F_{i-1}^\perp = \dim F_i + \dim F_{i-1}^\perp - n = i + (n-i+1) - n = 1$$

Il y aura 2 vecteurs unitaires (opposés !) sur la dte vect. $F_i \cap F_{i-1}^\perp$. On choisira celui f_i qui vérifiera $e_i \cdot f_i > 0$.

L'existence et l'unicité de $(f_1, \dots, f_n)$ s'en déduit.

Interprétation géométrique : $f_i = \frac{p_i(e_i)}{\|p_i(e_i)\|}$ où p_i est la projection orthogonale sur $F_{i-1}^{\perp}$.

* Application : $b(x,y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + (x_1y_3 + x_3y_1) + (2x_1y_2 + 2x_2y_1) + (x_2y_3 + x_3y_2)$

$\text{Mat}\, b = B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2, e_3)

1) (E, b) est euclidien puisque, par la méthode de Gauss, on obtient :

$$q(x) = 3\left(x_1 + \frac{x_3 + 2x_2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(x_2 + \frac{x_3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}x_3^2$$

ce qui prouve que la forme bil. symétrique b est positive ($q(x) \geq 0$ $\forall x$). Comme elle est évidemment non dégénérée (cf $\det B \neq 0$), ce qui équivaut à définie (sous l'hypothèse positive), on aura bien : b = f.b. sym. définie positive, ie c'est un produit scalaire.

2) Orthonormalisation de (e_1, e_2, e_3) :

α) $f_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \boxed{\frac{e_1}{\sqrt{3}}}$ car $\|e_1\| = \sqrt{e_1^2} = \sqrt{3}$

β) $f_2 = ae_1 + be_2$ vérifie : $\begin{cases} f_2 \cdot e_1 = 0 \\ \|f_2\|^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ae_1^2 + be_1 \cdot e_2 = 0 \Leftrightarrow 3a + 2b = 0 \\ 3a^2 + 2b^2 + 4ab = 1 \end{cases}$

car $\begin{cases} e_1^2 = 3 \\ e_1 \cdot e_2 = 2 \end{cases}$. On trouve alors : $\begin{cases} b = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \\ a = \mp\sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$

La condition $e_2 \cdot f_2 > 0 \Leftrightarrow ae_1 \cdot e_2 + be_2^2 > 0 \Leftrightarrow 2a + 2b > 0 \Leftrightarrow a + b > 0$ impose le choix $b = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Ainsi $\boxed{f_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}e_1 + \sqrt{\frac{3}{2}}e_2}$

γ) $f_3 = ae_1 + be_2 + ce_3$ vérifie :

$$\begin{cases} e_1 f_3 = 0 \\ e_2 \cdot f_3 = 0 \\ f_3^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ae_1^2 + be_1 \cdot e_2 + ce_1 \cdot e_3 = 0 \\ ae_1 \cdot e_2 + be_2^2 + ce_2 \cdot e_3 = 0 \\ f_3^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 2a + 2b + c = 0 \\ 3a^2 + 2b^2 + c^2 + 2ac + 4ab + 2bc = 1 \end{cases} \text{car} \begin{cases} e_1 \cdot e_3 = 1 \\ e_2^2 = 2 \\ e_2 \cdot e_3 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = -2b \\ 2b^2 + c^2 + 2bc = 1 \end{cases} \Leftrightarrow b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

La condition $e_3 \cdot f_3 > 0 \Leftrightarrow ae_1 \cdot e_3 + be_2 \cdot e_3 + ce_3^2 > 0 \Leftrightarrow a + b + c > 0$ impose le choix $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc $\boxed{f_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_2 + \sqrt{2}e_3}$